

この本をお読みになる方へ

この本はごく普通の読者を対象として書かれた群論の入門書です。「普通の読者」の中には、数学が大の苦手で見るとイヤだという方も含まれます。

予備知識ゼロの状態から出発し、超スローペースで群の準同形定理まで到達します。最初は簡単でも少しずつ難しくなっていきますから油断しないでください。全体を10日間で読み終える構成になっていますが、もちろんこれはひとつの目安。ご自分のペースに合わせて自由にお読みください。

抽象的な現代数学はなかなか手ごわい相手です。難攻不落の城のようにも見えますがどうでしょうか。群論は抽象的な数学の入り口でもあります。難敵攻略の第一歩として、この本を大いに活用してください。ご健闘を祈ります。

小松建三

プロローグ

こんにちは。神田もえです。

文系で数学が大の苦手なのに、何を血迷ったのか群論を勉強することになりました。

先生は微積寺住職の宇散草居和尚。去年の夏休み、親友の夏川夏子と一緒にお寺に通い、和尚さまに微積分を教えていただきました。その時のことは、小松建三著『微かに分かる微分積分』（数学書房）という本の中でくわしく紹介されています。

和尚さまは年齢不詳ですが、とっても親切でお茶目でステキな方です。ただ油断していると「さむーいギャグ」が飛んでくるので気が抜けません。正直ちょっと疲れます。

8月のある日曜日。京都郊外微積寺の本堂から、この物語ははじまります…

（微積寺の本堂。神田もえと田中沙織の2人が、テーブルをはさんで和尚と向かい合ってすわっている。神田もえと田中沙織はともに東京の恵理偉都大学2年生。）

もえ おひさしぶりです和尚さま。去年の夏休み、夏川夏子と一緒に微積分を教えていただいた神田もえです。

和尚 もえ？ もえは、もうええ。

もえ そんなー！ かわいそうなこと言わないでください！

和尚 夏子は元気か？

もえ はい。和尚さまにくれぐれもよろしくと申しておりました。おかげ
さまでテストはバッチリ！ 2人とも無事に進級することができま
した。和尚さまには感謝感激雨アラレです！

和尚 進級できて「シンキューベリーマッチ」ってとこかな。

沙織 はじめまして和尚さま。田中沙織です。恵理偉都大学理工学部2年
生で管理工学科に所属しています。もえとは同じテニスサークルで
大親友です。

和尚 群論を勉強したいそうだが。

沙織 そうなんです。2人とも「代数学基礎」という科目（内容は「群論入
門」です）をとってるんですけど、宇宙人のコトバを聞いているみた
いでまったく理解できません。夏休み明けにテストがあるのにどー
しましょって感じなんです。

もえ そこで和尚さまにお願いして助けていただこうと参上しました。沙
織の叔母さんがここから1時間くらいのところに住んでいるので、
そこに泊めてもらってお寺に通うことにしました。ハイ。

和尚 人を助けるのは僧侶のつとめではあるが、それにしてもいささかず
うずうしいとは思わないか？

もえ 思います。そりゃもう、しっかり自覚してます。でもステキな和尚
さまはきっと助けてくださるにちがいない！ そう確信しています。

和尚 まあ断るわけにもいくまい。わかった。明日から毎日午後1時にこ
の本堂に来なさい。1日2時間として10回もやれば何とかなるだ
ろう。土日は休みだぞ。

もえ やったー！ ありがとうございます。

沙織 うれしいなー。ステキな和尚さまに群論を教えていただけるなんて
とっても楽しみ！ でもちょっと心配だな。

和尚 心配？

沙織 あたしすごい笑い上戸なんです。和尚さまのギャグにギャハハ
ハと大笑いして勉強に身が入らないんじゃないかって、それが心配
です。

和尚 なに笑い上戸？ そうか. 1 年中でいちばん不愉快な季節って, 冬かい？

沙織 ギャハハハ！

もえ どっかで聞いたことあるギャグだなあ…

和尚 いやあ怒るより泣くより, 笑う方がいい. ただあんまり笑いすぎると「笑いじわ」ができるぞ.

沙織 笑いじわですか？

和尚 笑いじわが何本できるか数えた人がいる. 全部で 32 本あったそう.

沙織 32 本も？

和尚 そう. しわ $32 (4 \times 8 = 32)$ と言ってな.

沙織 ギャハハハ！ おんもしろーい！

和尚 去年とくらべると反応が早い. 結構なことだ.

もえ 先が思いやられるなあ…

和尚 なに？

もえ いえ, ひとりごとです.

和尚 毎日, 授業のノートと新しいノート, それに計算用紙を持ってきなさい.

もえ 計算用紙ですか？

和尚 実際に手を動かしていろいろ計算してみる. 抽象的な数学でも, これが意外に大切なのだ.

もえ 群論は何に使うんですか？

和尚 数学のいろいろな分野で群論は必要となる. ひとつ例をあげよう. 中学で「2 次方程式の解の公式」を習っただろう？

もえ 公式を丸暗記するのに苦労しました.

和尚 じつは 3 次方程式

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0)$$

と, 4 次方程式

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \quad (a \neq 0)$$

にも、それぞれ解の公式があつて古くから知られていた。

ところが5次方程式には、2, 3, 4次方程式のような解の公式は存在しないことが、19世紀になって証明されてしまったのだ。

沙織 5次方程式の解の公式は存在しないんですか？

和尚 そのことをきちんと理解するには群論の知識が不可欠で、正直言ってかなり難しい。機会があつたらガロア理論に関する本をのぞいてみるといい。

もえ 群論は実際に役に立つ数学なんですか？

和尚 現在のところ「実用的数学」のイメージからはほど遠い。しかし将来はわからんぞ。数学以外の思わぬ分野で群論が活用される可能性は十分ある。

沙織 あたしは理工学部の管理工学科でコンピュータ・サイエンスをやりたいんですけど、先輩から「ゼミで使うから群論は勉強しといた方がいい」って言われました。

和尚 もえは商学部の学生なのに、群論を勉強したいと思ったのか？

もえ もともと「代数学基礎」は理工学部の科目なんですけど、他の学部の学生も「一般教育科目」として履修できるんです。楽勝科目だというウワサを信じて気楽に取ったら、楽勝だなんてトンデモナイ！あたしは一般教育科目をギリギリに取ってるので、もし「代数学基礎」を落としたら落第するかもしれません。

和尚 落第？ ふーん。落第する方が、^{らく}楽だい。

沙織 おっとお！

もえ そのギャグは去年もうかがいました。

和尚 そうだったかな。授業のノートは？

沙織 これです。1回も休んでません。

和尚 どれどれ。なるほど。内容は群論の初歩で、あまり難しいことはやってないな。準同形定理ぐらいまでやっておけば、とりあえずテストはOKだろう。

もえ やったー！ これで単位はもらったも同然だ。

和尚 こらこら，そんなに先走っちゃダメだ。今日はこれから法事がある。
明日の1時にまたここで会おう。

もえ よろしくお願ひします。失礼します。

沙織 明日からよろしくお願ひします。失礼しまーす。

和尚 気をつけてお帰り。

●目次

この本をお読みになる方へ... i

プロローグ... ii

初日 置換の計算 (1)... 1

2日目 置換の計算 (2)... 19

3日目 群とは何か (1)... 45

4日目 群とは何か (2)... 60

5日目 群とは何か (3)... 73

6日目 部分群... 90

7日目 巡回群... 104

8日目 正規部分群... 116

9日目 準同形写像... 138

10日目 同形写像... 154

おまけ... 172

付録... 174

あとがき... 178

索引... 179