

プロローグ

夏川夏子と神田もえは東京の恵理偉都大学^{えりいと} 1 年生。2 人とも根っからの文系で数学は超苦手なのだが、所属する経済学部と商学部は 1 年の数学が必修。夏休み明けの「微分積分」のテストに進級がかかっている。このままでは落第確実の赤信号。そこで夏休みを利用して京都の M ホテルに滞在、知る人ぞ知るといふ通称微積寺(びせきでら)に通って微積分の「修行」をすることになった。

微積寺の本堂。テーブルをはさんで夏子ともえの 2 人が和尚と向かいあつてすわっている。

夏子 あたしたち、微分積分がまったくわからないんです。

もえ どうしようもなくして駆け込んできました。なんとかして下さい！ お願いします。

夏子 お願いします。

和尚 ウーンそうか。ところで君たち、「微分積分」をなんと読むか知ってるか？

夏子 ビブンセキブンじゃないんですか？

和尚 ずいぶん昔のある日、ある人が「微分積分」の読み方を発見した。大発見と言っても良いだろう。

もえ なんと読むんですか？

和尚 微(かす)かに分かる、分かった積(つも)りになる、と読むのだ。

もえ おもしろーい！

和尚 微分積分などと大げさに考えることはない。微かに分かって、それで分かった積りになればいいのだ。

夏子 なるほど。少し気が楽になりました。でもとにかく微分が全然分かりません。

和尚 人に頼っちゃダメだ。昔から言うだろ、ビブンのことはビブンでやれって。

夏子 そんなー、なんとかして下さい！

もえ 高校数学の数Ⅲはもちろん、数Ⅱもわからないんです。

和尚 数Ⅱがわからん？ かわいすーに！

夏子 このままでは落第です。

和尚 落第する方が、楽だい。

もえ そのギャグはどっかで聞いたような気がするなあ。

和尚 最初から論理に頼っちゃいかん。論理ばかりだとさびしくなる。「ロンリー」と言うくらいで。

夏子 は？

和尚 まず「体で覚える」のが先だ。そうしないと身につかん。

もえ 体で覚える、ですか？

和尚 いい練習問題を選んで解いてみる。最初は間違いだらけでも、意味がよくわからなくてもいい。慣れてくると、だんだん正解が出せるようになる。問題がうまく解けたときの快感を経験すればしめたものだ。問題が解けると自信がつくぞ。「どんなもんだい」と言うくらいで。

もえ おっとお！

和尚 自信がつけば自然に勉強しようという意欲がでてくる。大嫌いだった微分積分が、なんとなく好きになってくる。昔「7時から11時までやってる」というコンビニのCMソングがあったが、そのメロディーに合わせて

♪ビブンセキブン、いい気分♪

と歌い出すようになるのさ。

もえ ホントっすか？ 期待しちゃうな。

和尚 大学の微積分の授業は、ちゃんと出てるか？

夏子 毎回出てます。でも黒板の字が小さすぎて見えないんです。一番前にするとチョークのこながとんでくるのでマスクしてます。もうサイテー！

和尚 チョークのこなねえ。チョークを発明した人が誰だか知ってるか？有名な日本の詩人だぞ。

夏子 は？

和尚 「石川はくぼく」と言ってな。

夏子 はあ…

和尚 反応がちょっと鈍いな。まっいいか。

夏子 これが授業で使ってる微積分のテキストです。抽象的でチンプンカンプン。宇宙人の言葉みたいでさっぱりわかりません。

和尚 どれどれ。なるほどこりゃダメだ。1年生のテキストにしては「証明」が多すぎる。こんなに証明ばかりだとイライラするだろ。「証明なんて、ちきしょーめー！」と叫びたくなるだろ？

夏子 そうですそうです。その通りです。

和尚 線形代数の授業は？

もえ 線形代数も最初はチンプンカンプンでした。抽象的な説明ばかりで胃が痛くなりました。そしたら友達に「線形で胃が痛くなるのは線形性胃炎だ」なんて言われちゃいました。

和尚 なるほど。

もえ 困りはててたら、偶然書店で『線形代数千一夜物語』（小松建三著、数学書房）という本を見つけたんです。そしたらこれがスバラシイ本で、すべてが目からウロコ。本当に助かりました。

和尚 あれはいい本だから、友達にもすすめるといい！

もえ おかげで線形代数は好きになって、中間テストでもいい点数を取れたんですけど、微積はとんでもない点数で、まさにがけっぶちです。

和尚 そうか、ところで初対面なのに自己紹介をしていないが。

夏子 あ、ごめんなさい。夏川夏子と申します。恵理偉都大学の経済学部1年生です。出身は兵庫県です。大学へは付属の恵理偉都女子高から進学しました。微分積分がまったくできません。よろしくおねがいします。

もえ 神田もえです。東京は神田生まれの江戸っ子です。恵理偉都大学商学部1年生で、大学には指定校推薦で入りました。夏子と同じテニサーに所属しています。

和尚 テニサー？

夏子 テニスサークルのことをテニサーって言うんです。

和尚 なるほど。ワシは当寺の住職、^{うさんくさい}宇散草居だ。2人をなんと呼んだらいいのかな？ 名前か名字か、それともフルネームか。

夏子 あ、あたしは「夏子」でおねがいします。

もえ 「もえ」って呼んで下さい。「もえさん」や「もえちゃん」じゃキショクわるいので、「もえ」でおねがいします。

和尚 わかった。高校の数学はどこまで習ったのかな。夏子は？

夏子 あたしは一応数Ⅲまでやりました。

もえ すごーい！

夏子 でも数Ⅲは始めから終わりまでちんぷんかんぷんで、何一つ理解してません。授業は出てたけど、ノートも取らず、ケータイでメールのやりとりばかりしてました。

もえ それでどうして合格したのよ。

夏子 先生が若い男の先生でちょっとハンサムだったの。そやから誕生日にプレゼントをあげて、答案用紙に「愛してます♡」で書いといたら、テストがボロボロでも合格できたわ。

もえ なーにそれ、インチキじゃん！

夏子 人聞きの悪いこと言わんといて。処世術よ、処世術！

和尚 おやおや。もえは高校数学どこまで習ったのかな？

もえ あたしは外部推薦で大学に入ったので、夏子と同じく入試は受けてません。数学は2年生の数ⅡBまでやりました。そこで微積の初歩は習ったけど、3年生で数学と縁が切れたら、1年間できれいさっぱり全部忘れちゃった。もうなんにもおぼえてません。3年の秋に推薦が決まってからはとにかく遊んでばかりで、高校で習ったことはぜんぶ忘れちゃいました。大学に入ったらいきなり数Ⅲレベルの微積が出てきて四苦八苦してます。

和尚 なるほど。微積分の勉強、というか「修行」は明日から始めるが、その前に2人の学力がどの程度か知っておきたい。次の例題を解いてみなさい。

●例題 1. 次の関数を微分せよ.

$$(1) y = x^3 + 1. \quad (2) y = \sqrt{x^2 + 1}. \quad (3) y = \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 + x + 1}.$$

和尚 どうだな？

もえ 出た！ いきなり例題だ. 例題なんてきれーだい！

和尚 この例題が簡単にできるようなご仁は当寺で修行する必要はない. だから今できなくても気にすることはない.

もえ あー良かった.

和尚 当寺で修行すればこんな例題はお茶の子さいさいだ. もえは数Ⅱ Bまで習ったのだから？ それなら(1)は解けるはずだ. (1)の答えはどうなる？

もえ え？ おぼえてないよう！ なんだっけなー. えーとえーと, x の肩についてる3を前に出して, それに x のなんとか乗をかけるんだけど, 3に1を足すのか1を引くのかどっちだったっけ.

和尚 微分と積分がごっちゃになってるな.

もえ えーい, ヤマカンで行きます！ (1)の答は

$$y' = 3x^2 + 1$$

です.

夏子 1は定数だから, 微分すると消えるんとちゃう？ あんまり自信ないけれど

$$y' = 3x^2$$

だと思います.

和尚 夏子が正解だ.

夏子 やったー！ もえに勝った！

もえ 夏子は数Ⅲまでやったんだから(1)ができるのは当たり前でしょ. シャクにさわるなあ.

和尚 (1)ができないということは, はっきり言って「微分がまったくできない」ということだ.

もえ 「微分がまったくできない」ですか？ いやですそんなの.

和尚 なんとかしたいか？

もえ なんとかしたいです.

和尚 微分がまったくできない状態から, 短期間で微分がなんとかできる状態になるには, 相当の覚悟が必要だぞ.

もえ 大丈夫です. 心の準備はできてます.

和尚 そうか. 例題の (2) と (3) は高校の数Ⅲの範囲だが, 夏子は数Ⅲを習ったのだろう. 少しはわかるか？

夏子 ゼーンぜんわかりません！

和尚 力強いなあ. まったくお手上げか？

夏子 その通りでございます.

和尚 おやおや. 2人とも今回の修行では大いに苦勞するかもしれんぞ.

もえ 平気平気. 2人とも樂觀主義ですから. だけど例題の (2) と (3), ホントに解けるようになるんですか？

和尚 しっかり修行すれば, こんなものはお茶の子さいさいだ.

もえ お茶の子さいさいですか. うれしいなあ. できるようになったらクラ友ともに自慢してやります.

和尚 クラ友？

もえ クラスの友達, 略してクラ友です.

和尚 例題の答を書いたメモを渡しておこう. 今は解けなくても, 自分で解けるようになったら練習問題としてやってごらん.

●例題??の答

$$(1) y' = 3x^2. \quad (2) y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}. \quad (3) y' = \frac{3x^2+6x}{(x^2+x+1)^2}.$$

もえ ありがとうございます。ところで今回の「修行」では微積分のどこまで教えていただけるんですか？

和尚 微分と積分の基本的な計算と、大学で学ぶ偏微分、2変数関数の極値問題などを予定している。

もえ うわあ、難しそう！

和尚 夏子は数Ⅲの教科書をまだ持っているか？

夏子 はい。今日も持ってきます。

和尚 参考になるから毎回持ってきなさい。新しいノートを用意すること。人間はコンピュータとちがって「忘れる」ようにできているのだ。「わかった」と思っても、時間がたつと忘れてしまう。自筆ノートはとても大切なものだ。それでは明日から毎日、午後1時にここに集合して修行を始めよう。

夏子 はい。どうもありがとうございました。

もえ ありがとうございました。

夏子 明日からよろしくお願ひします。失礼します。

もえ 失礼しまーす。

和尚 バイビー！

●目次

プロローグ … i

第一話 微分経 … 1

第二話 合成関数の微分 … 14

第三話 積の微分と商の微分 … 29

第四話 導関数(1) … 41

第五話 導関数(2) … 50

第六話 偏微分 … 69

第七話 2変数関数の極値 … 85

第八話 三角関数の微分 … 95

第九話 e^x の微分 … 108

第十話 $\log x$ の微分 … 118

第十一話 不定積分 … 131

第十二話 定積分 … 145

第十三話 微分を表す記号 dy/dx … 155

第十四話 置換積分法 … 169

あとがき … 184

索引 … 185

微分経

和尚 それでは本日より微積分の修行を始める。2人とも心の準備はいいか？

夏子 はい。

もえ だいじょうぶです。

和尚 ホントにだいじょうぶか？

もえ あたしこう見えても体育会系です。しかも江戸っ子ですから、夏子みたいな芦屋のお嬢さまじゃありません。

夏子 ちゃうちゃう。お嬢さまとちゃうよ。

和尚 夏子は芦屋か。おどろいた。アッシャー！

もえ ツマラナイ・・・！

和尚 なんだ？

もえ いえ。ひとりごとです。

和尚 まず、微分の基本的な計算ができるようにしてしまおう。

夏子 ムズカシそう！

和尚 幸いなことに、当寺には微分経(びぶんきょう)というありがたいお経がある。

夏子 微分経ですか？ 聞いたことはありません。

和尚 これは数百年前、乳^{にゅうとん}豚上人というお方が書いたと伝えられる。とても役に立つもので、当寺に代々伝わっておる。

もえ だいじょうぶかなあ・・・

和尚 なんだ？

もえ いえ、ひとりごとです。

和尚 微分経の成立には、来府日津和尚も協力したらしい。なにしろ古いものなので、破れてしまったり、ネズミのおしっこで読めなくなったところもある。しかし、最初のところはほぼ完璧に残っている。これは奇跡と言うべきだろう。

夏子 そんなにありがたいお経なんですか？

和尚 いずれわかる。

●微分とは何か

和尚 微分経の一番最初には、微分とは何であるかが書かれている。すなわち、

微分するとは、導関数を求めることである。導関数のことを単に微分ということもある。

もえ それくらいあたしでも知ってますよー。

和尚 えらそうなことを言うな。人間はコンピュータとちがってすぐに忘れるようにできているのだ。簡単だと思ってもバカにせずに、ちゃんとノートに書いておきなさい。

もえ はーい。

和尚 導関数の定義はずっとあとになってから登場する。微分経では、まず計算の基本が先に述べられている。

夏子 なるほど。

●微分を表す記号

和尚 微分を表すには、微分する関数をカッコで囲んで右肩にダッシュ（'）をつけるのが最も簡単な方法だ。たとえば

$$\left(x^2 + x - \frac{1}{2}\right)', \quad \left(\sqrt{x^2 + 1}\right)'$$

などのように表すのだ。

夏子 グッシュェをつけることが「微分する」っていう意味なんですか？

和尚 その通りだ。

●定数の微分

和尚 最初の文に続いて、微分経には次のように書かれている。

定数を微分すると 0 になる。

夏子 定数も一つの関数と考えるんですって？

和尚 その通り。定数を微分するといつでも 0 になる。たとえば

$$(-2)' = 0, \quad \left(\frac{4}{5}\right)' = 0, \quad (\sqrt{3} - 1)' = 0$$

といったぐあいだ。

もえ 簡単ですね。

和尚 バカにしちゃいかん。簡単だと思っても、つい忘れてしまうことがある。かんちがいすることもある。ちゃんとノートに書いておきなさい。

もえ はい。

● x^α の微分

和尚 微分経には続いて x^α (α は定数) の微分のことが書かれている。

もえ うわあムズカシそう。やっと数学らしくなってきましたね。

和尚 微分経にはたった 1 行、次のように書かれている。

オドロキ、モモノキ、サンシヨノキ。

夏子 なんですか、それ？

もえ だいじょうぶかなあ・・・

和尚 なんだ？

もえ いえ。ひとりごとです。

和尚 実際の例をやってみよう。まず x^3 からいけど。

微分経にしたがって x^3 を微分すると、

$$\begin{array}{ll} \text{(オドロキ)} & 3 \\ \text{(モモノキ)} & 3x \\ \text{(サンシヨノキ)} & 3x^2 \end{array}$$

となる。すなわち、

$$(x^3)' = 3x^2$$

と求まるのだ。

もえ なーにそれ？

夏子 手品みたいですね。

和尚 今度は x^4 を微分してみよう。

微分経にしたがって x^4 を微分すると、

$$\begin{array}{ll} \text{(オドロキ)} & 4 \\ \text{(モモノキ)} & 4x \\ \text{(サンシヨノキ)} & 4x^3 \end{array}$$

となる。すなわち、

$$(x^4)' = 4x^3$$

と求まる。

もえ ウーン。

夏子 なんとなくわかったような気がします。

和尚 微分が微(かす)かに分かったかな？

つぎは x^5 を微分してみよう。

もえ x の5乗ですか？ ゴジョーダンでしょう。

和尚 ツマラナイ・・・

もえ なんですか？

和尚 いや、ひとりごとだ。

微分経にしたがって x^5 を微分すると、

$$\begin{array}{ll} \text{(オドロキ)} & 5 \\ \text{(モモノキ)} & 5x \\ \text{(サンシヨノキ)} & 5x^4 \end{array}$$