ごあいさつ

はじめまして．**シェヘラザード**と申します．宮殿で毎夜，数学が苦手な王様に線形代数をお教え申し上げております．本書では「語り手」を務めさせていただきますので，よろしくお願いいたします．

数学は見るのもイヤという**数学アレルギー**にお悩みの方々は本当にたくさんいらっしゃいます．数学はあらゆる学問の基礎．その数学が多くの国民から嫌われ拒否されているという現実は何を意味するのでしょう．もしかすると**数学アレルギーの蔓延は国の総合的な力が将来衰えていくことを暗示している**のではないかと心配になってしまいます．

ところで，この数学アレルギーにとても良く効くお薬があるのです．**快感**と**優越感**でございます．

快感と申しますのは，数学の問題が解けたときの，やったーという快感のことでございます．問題がやさしすぎますと，快感はえられません．難しすぎて解けなければ，やはりダメでございます．ちょうどいい難しさの数学の問題がうまく解けたとき，やったーという快感がえられます．なんとこの快感，サッカーのゴールが決まった時や，恋のときめきを感じた時と同じなのだそうでございます．

優越感と申しますのは，人にはできないことが自分にはできると自覚することでございます．本書を勉強なさったあとで，親しいお友達に次の問題が解けるかどうか聞いてみて下さい．4 次の行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

の値を求めよ，という問題です．これを見てスラスラ解ける人は，専門家を除いてほとんどいないでしょう．本書をしっかり勉強なさった方はピン

と来るはず．行和が等しいケースですから，第 1 列に他の列を加えて共通因子の 10 をくくり出し，あとははき出しと展開によって，解いてみせましょう (答は 160)．お友達のびっくり仰天した顔を見て，なんともいえない優越感を味わうことができるのです！

数学アレルギーの方が快感と優越感を共に味わうことのできる数学の分野として，線形代数は最適のものと言えるでしょう．微積分とちがって，計算は基本的に四則演算 $(+ - \times \div)$ だけでございます．中学校の数学をよく理解なさっている方なら，どなたでもチャレンジできます．

申しおくれましたが，**線形代数**とは，**行列式**，**ベクトル**，**行列**，**連立 1 次方程式**などを扱う数学の一分野でございます．応用範囲が極めて広く，大学でも重要な科目として教えられていますが，大学の先生は理論に重点を置いて計算をしっかり教えないため，今の大学生は基本的な計算がほとんど身に付いておりません (試験が終わるとすぐ忘れてしまいます)．ですから気合いを入れて本書を勉強すれば，大学生にも解けない問題が自分には解けるという優越感を体験することができるのです．

ひとつ大切なご注意がございます．線形代数の計算は中学生でもできる簡単なものではありますが，計算の量がかなり多く，しかも一箇所計算ミスをすると全部アウト，というケースが多いのです．計算は慎重に行い，必ず計算のチェックを行うことを習慣づけて下さい．そうしないと (多くの大学生がそうであるように) 計算ミスの嵐になってしまいます．

数学アレルギーの方が本書をお読みになるとき，少くとも**行列式の計算法**だけはしっかりマスターすることを目標にして下さい．それだけでかなりの快感と優越感を味わうことができます．線形代数を使った**相性占い**を楽しむこともできるようになります．ご家庭で，職場で，皆様のアイデアと工夫をつけ加えて，さらに面白い占いを作り出して下さい．

論理と証明一辺倒の従来の考え方を改め，本書では**楽しさと慣れることを基本に数学が体の中に自然に入って行く**よう工夫されています．

何度読んでもわからない所は適当に読みとばして下さい．**つまみ食い**で

も**いいとこどり**でも結構でございます．マイナス思考ではなくプラス思考でお読み下さいませ．

本書をお読みになって多少とも線形代数に興味をお持ちになりましたら，図書館や大型書店で線形代数の書物を覗いてみて下さい．ちんぷんかんぷんのものが多いかと思いますが，中には，これなら読めそう，と思われるものもあるでしょう．ぜひチャレンジしてみて下さい．本書で学ばれた**線形代数のツボ**がとてもお役に立つでしょう．行列式や行列のもつさまざまな性質がなぜ成り立つかという謎解き (いわゆる**証明**) を知ることもできます．

さてさて，本書をお読みになるとき，できましたら新しいノートを 1 冊ご用意下さい．心のご準備はもうよろしゅうございますか？　それでは,おやじギャグが玉にキズのお茶目な王様とご一緒に,「線形代数千一夜物語」を心行くまでお楽しみ下さいませ．

シェヘラザードより

●目次

●第一夜

行列式の計算

(シェヘラザードという名前は長いので,「シェ」と略記させていただきます.)

◉行列式

王様 ねえ,シェヘラザード.

シェ はい.

王様 一年中でいちばん不愉快な季節って,冬かい?

シェ いきなり出ましたね! 王様,今夜は行列式のお話をいたします.

王様 なつかしいなあ.仰げば尊しにほたるの光か.

シェ それは卒業式でございます!

◉2 次の行列式

シェ 2 次の行列式とその値を,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

と定めます.たとえば

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 1 \times 1$$
$$= 12 - 1$$
$$= 11$$

となります．

王様　ナナメにかけて

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

そして引き算するのだな．かんたんかんたん．

シェ　それでは王様，次の問題をお考え下さいませ．

●例題 1

行列式 $\begin{vmatrix} 5963 & 5965 \\ 5964 & 5966 \end{vmatrix}$ の値を求めよ．

シェ　いかがでございます？

王様　5963 に 5966 をかけるのか！　ゴクローサンだ．電卓はどこだ？

シェ　数字の並び方に規則性がございます．そこで 5963 を a とおきますと，

$$\begin{vmatrix} 5963 & 5965 \\ 5964 & 5966 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a+2 \\ a+1 & a+3 \end{vmatrix}$$
$$= a(a+3) - (a+2)(a+1)$$
$$= a^2 + 3a - (a^2 + 3a + 2)$$
$$= -2$$

となり，電卓が無くても計算できるのでございます．

●例題 1 の答

-2

◉行と列

シェ 行列式の中で，ヨコに並んだ数を**行**と申します．行は上から第 1 行，第 2 行，…と数えます．たとえば 3 次の行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

の第 1 行は (a, b, c)，第 2 行は (d, e, f)，第 3 行は (g, h, i) となります．行列式の中で，タテに並んだ数を**列**と申します．列は左から第 1 列，第 2 列，…と数えます．3 次の行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

の第 1 列は $\begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix}$，第 2 列は $\begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix}$，第 3 列は $\begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix}$ となります．

●例題 2

4 次の行列式

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

の第 3 行と第 4 列はそれぞれ何か．

シェ 行と列を逆におぼえてしまう方がよくいらっしゃいます．行はヨコ，列はタテでございます．

●例題 2 の答

$(0, 1, 1, 1)$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

◉行列式の計算の基本

シェ 行列式の定義はとてもややこしいので明晩ご説明いたします．まず計算ができるようにしてしまいましょう．計算の基本は，**はき出しと展開によって行列式の次数を下げていく**，ということでございます．

王様 **はき出し**と**展開**がキーワードだな？

シェ 行列式には，次の重要な性質がございます．

行列式のある行に，他のある行を何倍かしたものを加えても (あるいは引いても)，行列式の値は変わらない．

行列式のある列に，他のある列を何倍かしたものを加えても (あるいは引いても)，行列式の値は変わらない．

シェ たとえば 3 次の行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$

の第 1 行に，第 2 行を 2 倍したものを加えますと，

$$\begin{aligned} (1, 2, 3) + 2 \times (4, 5, 6) &= (1, 2, 3) + (8, 10, 12) \\ &= (9, 12, 15) \end{aligned}$$

より，

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix}$$