はじめに

表現論の手法は現代の保型形式の研究では必要不可欠のものである．それは保型形式論に広い視野と高い柔軟性を与え，様々な現象を統一的に説明する言葉を提供している．研究の主体は保型形式に付随して生ずる L-関数の性質を探ることであり，個々の保型形式は脇役に甘んじているようにも思える．しかし保型形式が数学の世界に現れた歴史を遡れば，その起源の一つは楕円関数の研究にあって，そこでは個々の保型形式がそれぞれ固有の役割をはたしていたことが思い出される．このようにして発見された保型形式が一般化され，その背後にある本質の一つとして保型表現を研究するに至ったというのが，保型形式論の大きな流れの一つと言って良いだろう．

本書は保型形式と表現論の関わりを解説した入門書である．保型形式を記述するのに表現論がどのように関係するかを解説したものであり，本格的な保型表現の解説書ではないことを予めお断りしておく．楕円関数から保型形式が生ずる様子から話を始めて，そのような保型形式が表現論の言葉でどのように記述されるか，あるいは楕円関数とは直接の関係を持たない方向に保型形式を一般化するのに表現論がいかに有効であるかを述べたい．

ところで，楕円関数との関連で発見された保型形式は，複素上半平面

$$\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

上の正則関数で，ある整数 k を定めると，$ad - bc = 1$ なる任意の整数 a, b, c, d に対して

$$f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = (cz + d)^k f(z) \tag{1}$$

なる変換公式を満たすものであった．このような保型形式はモジュラー形式とよばれるのが通例である．これに対して H.Maass [38] は $\mathfrak{H}$ 上の実解析的関数であって変換公式 (1) を満たすもの（ただし $k = 0$）の重要性を指摘した．これを Maass の wave form とよぶが，このようなものを含めて考えるときには保型形式という言葉がふさわしいように思われる．モジュラー形式と保型形式を明確に区別する基準や定義があるわけではないが，モジュラー形式は保型形式の特殊な場合と思っていて間違いはなかろう．

さて，本書で取り扱う保型形式と表現論の関わりは大きく三つの主題に分けら

れる．第一の主題は，上で述べた Maass の wave form と古典的なモジュラー形式を，自然な同一の舞台の上で理解するのに表現論の言葉を用いるということである．すなわち $\mathfrak{H}$ 上の関数として定義された保型形式を実 Lie 群 $SL_2(\mathbb{R})$ 上の関数として再定義し，その解析的性質（モジュラー形式の場合には正則性，Maass の wave form の場合にはある種の微分方程式を満たすこと）を $SL_2(\mathbb{R})$ の既約ユニタリ表現の言葉を用いて記述する．

一方，楕円関数を構成する手段としてテータ級数とよばれる一群の無限級数が導入された．そのもっとも簡単な場合は $\mathfrak{H}$ 上の関数

$$\vartheta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi\sqrt{-1}n^2 z} \qquad (z \in \mathfrak{H})$$

である．これら一群の $\mathfrak{H}$ 上の関数は，(1) と同様の変換公式を満たす．ただし $k = 1/2$ でなくてはならない．このような変換公式を満たすテータ級数を表現論を用いて理解しよう，というのが第二の主題である． そのために $SL_2(\mathbb{R})$ の二重被覆群のユニタリ表現である Weil 表現を導入する．

第三の主題は Hecke 作用素の理論を表現論の視点から理解することである．Ramanujan が初めて指摘したことであるが，モジュラー形式から自然に生ずる **Dirichlet 級数** 1) が **Euler 積表示** 2) をもつことがある．このような現象を系統的に説明する手段として Hecke 作用素が定義された．それを表現論の立場から記述するためには，実数体上の $SL_2(\mathbb{R})$ あるいは $GL_2(\mathbb{R})$ と p-進体 $\mathbb{Q}_p$ 上の $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ を同等に扱う必要がある．一言で言えば，$\mathbb{Q}$ 上定義された代数群 GL_2 のアデール化上で保型形式を扱うことになる．

これら三つの主題について，出来る限り自足的な解説を試みるというのが本書の趣旨である．予備知識として，高木貞治の『解析概論』程度の解析学，群，環，体，ベクトル空間等の基本的な抽象代数学，Hilbert 空間や Banach 空間についての基本事項，局所コンパクト Hausdorff 空間に関する位相空間論，複素多様体の定義を含めた若干の事項を仮定している．それに加えて必要な幾つかの事項を付

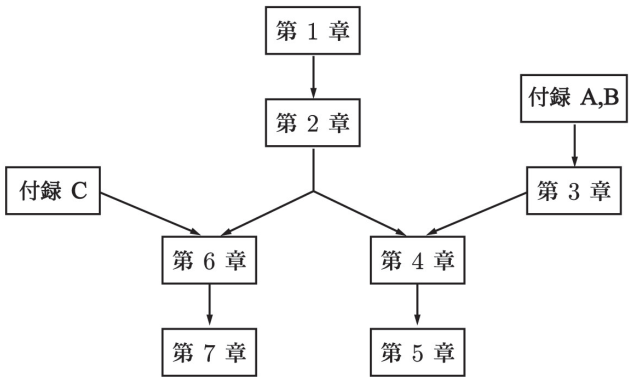
---

1) 複素数列 $\{a_n\}_{n=1,2,3,\cdots}$ に対して，複素変数 s を含む無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ を一般に Dirichlet 級数とよぶ．数列 a_n の増大度が $|a_n| = O(n^\sigma)$ ならば，付随する Dirichlet 級数は $\mathrm{Re}\, s > \sigma + 1$ で絶対広義一様収束する．

2) 各素数 p に対して $P_p(0) = 1$ なる複素数係数多項式 $P_p(t)$ が定まって，有限個の p を除いて $P_p(t)$ は n 次多項式であり，その根は絶対値において有界とする．このとき，複素変数 s に対して，すべての素数 p 上の積 $\prod_p P_p(p^{-s})^{-1}$ は $\mathrm{Re}\, s$ が十分大きいときに絶対かつ広義一様収束する．これを n 次の Euler 積とよぶ．

録で解説してあるので参考にしてほしい．

本書の構成を概観しておこう．本書は七つの章と三つの付録からなる．各章と付録の大雑把な論理的順序を図示すると以下のようになる．



第 1 章では楕円関数と，そこから生ずるモジュラー形式を調べる．

第 2 章では，楕円関数から生ずるモジュラー形式を動機として，一般のモジュラー形式を定義して，その基本的な性質を示す．

第 3 章は話題が一転して，局所コンパクト群のユニタリ表現について解説する．この章で用意した道具を用いて，第 4, 5 および 7 章の議論が展開される．

第 4 章では大きく三つの主題を扱う．第一に，第 1 章，第 2 章で調べたモジュラー形式がユニタリ表現の言葉を用いてどのように記述されるかを解説し，引き続き Maass の wave form が同じ文脈でどのように捉えられるかを解説する．第二に，保型形式に付随した Dirichlet 級数を定義して，それが複素平面上の有理型関数に解析接続できること，特徴的な関数等式をもつことを示す．逆に Dirichlet 級数が複素平面上の有理型関数に解析接続され，特徴的な関数等式をもつならば，その Dirichlet 級数は保型形式に付随したものであることを示すのが第三の主題である．このようにして，第 1 章，第 2 章で楕円関数を記述するのに重要であったモジュラー関数から離れて，特殊な Dirichlet 級数の対応物としての保型形式という認識に達する．

第 5 章は Hecke 作用素の表現論的理論の解説である．保型形式が Hecke 作用素の固有関数であるときに，付随する Dirichlet 級数が Euler 積表示を持つメカニズムを表現論の立場から明らかにする．さらに Ramanujan-Petersson 予想，Sato-Tate 予想などの保型形式に関連した予想（一部は既に証明されているが）を

表現論の視点から説明する.

第 6 章では，第 1 章，第 2 章で登場したテータ関数，あるいはテータ級数を多変数化する．複素射影多様体となる複素トーラス，すなわち編極アーベル多様体と，その同型類の空間を詳しく調べて，そこから自然な形で多変数化したテータ級数を定義する.

第 7 章では Weil 表現を解説して，その応用として第 6 章で定義した多変数テータ級数の変換公式を示す．Weil の原論文 [79] ではアデール化した群上で議論を展開するが，本書では頁数の制限から実数体上の議論に限る．アデール化した群上の Weil 表現の理論への足掛りになれば良いと思う.

付録 A では，局所コンパクト群上の Haar 測度など，局所コンパクト空間上の測度論について，本書で必要な範囲で簡単な解説を与える.

付録 B では，実および複素解析的多様体，Lie 群と Lie 環などについて，基本的な言葉を解説した．定義と結論のみ与えて，証明は他の教科書に譲る.

付録 C では，第 5 章，第 6 章で必要となる斜交空間の代数的性質を解説する.

参考文献のリストは網羅的なものを意図していない．さらに専門書を読み進める際の参考のために，簡単なコメントを付けた.

（後略）

2014 年 3 月

著　者