テキスト理系の数学１　『リメディアル数学』
問題解答

(現在、第 1 章及び第 8 章のみです。順次更新してまいります)

2013 年 1 月 7 日

第 1 章

問 1.1

FFTFF
FTTFF
TFTFF
TTFTT

問 1.2

(1)	T F	(2)	FFFTT FTTFF TFTFF TTTFF	(3)	FFFTT FTFTT TFFTT TTTFF

問 1.3	問 1.4	問 1.5	問 1.6
TTTTT	TTTTT		
FTTTT	TTTFT		
FTTTT	TTFTT	TTTT	TF
FTTTT	FFFFF	FTTF	FT
TTTTT	TFFFF	TFFT	TF
FFTFF	TFFFF	TTTT	TF
FFFTF	TFFFF		
FFFFF	FFFFF		

問 1.7

p は q の必要十分条件

問 1.8

TTT
FTF
TFF
TTT

問 1.9

真となる範囲 $-x \leq x \leq 3$，偽となる範囲 $x > 3$ または $x - 3$

問 1.10

作れない

問 1.11

(1)　$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})(p(n, N) \wedge \overline{q(x, n, \varepsilon)})$

次を満たす $\varepsilon > 0$ が存在する．

「任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し，次を満たす $x \in \mathbb{R}$ と $n \in \mathbb{N}$ が存在する．

『$p(n, N)$ が真かつ，$q(x, n, \varepsilon)$ が偽』」

(2)　$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+)(\forall \delta \in \mathbb{R}_+)(\exists x, y \in \mathbb{R})(p(x, y, \delta) \wedge \overline{q(x, y, \varepsilon)})$

次を満たす $\varepsilon > 0$ が存在する．

「任意の $\delta > 0$ に対し，次を満たす $x, y \in \mathbb{R}$ が存在する．

『$p(x, y, \delta)$ が真かつ，$q(x, y, \varepsilon)$ が偽』」

問 1.12

(1)　真　(2)　偽　(3)　真　(4)　真

問 1.13

(1)　真　(2)　真　(3)　偽　(4)　真

問 1.14

自然数 x が偶数でないとすると，$x = 2n - 1$ となる自然数 n がある．$x^2 = (2n - 1)^2 = 2(n^2 - n) + 1$ なので，x^2 は偶数でない．

問 1.15

対偶を示す．$x + y + z = 0$ とすると，$(x + y + z)^2 = 0$ より

$$x^2 + y^2 + z^2 = -2(xy + yz + zx)$$

となり，対偶が真なので，この命題も真になる．

問 1.16

(1)	T F	(2)	TFFTT FTTFF TFFTT TTFTT	(3)	TFFT FTTF TFFT TTFT

問 1.17

自然数 $m, n \in \mathbb{N}$ を用いて，$\sqrt{3} = \dfrac{n}{m}$ となると仮定する．(つまり，$\sqrt{3}$ が有理数と仮定する．) ただし，n と m は共通の約数を持つ場合は，約分して共通の約数がないように仮定してよい．

よって，$3m^2 = n^2$ となるが，n が偶数ならば n^2 も偶数になり，$3m^2$ が偶数になる．一方，m が奇数ならば m^2 も奇数なので，$3m^2$ も奇数になる．ゆえに，n が偶数ならば，m も偶数になる．よって，共通の約数を持つので n が偶数にはならない．

n が奇数であるから，n^2 も奇数である．一方，m が偶数だと $3m^2$ は偶数なので $3m^2 = n^2$ が成り立たない．ゆえに，m も奇数と仮定してよい．

よって，自然数 k, ℓ を用いて，$m = 2k-1$, $n = 2\ell-1$ と表せる．$3(2k-1)^2 = (2\ell-1)^2$ なので，

$$12k(k-1) + 3 = 4\ell(\ell-1) + 1$$

である．定数項だけを右辺に集めると

$$4\{3k(k-1) - \ell(\ell-1)\} = -2$$

なので，

$$2\{3k(k-1) - \ell(\ell-1)\} = -1$$

となるが，左辺は 2 の倍数なので矛盾する．ゆえに，$\sqrt{3} = \dfrac{n}{m}$ とは表せない．

(2)　$\sqrt{6} = \dfrac{n}{m}$ と既約分数で表せたとする．$6m^2 = n^2$ なので，左辺は偶数なので，n は偶数である．

よって，$n = 2k$ となる自然数 k がある．よって，$6m^2 = 4k^2$ であり，$3m^2 = 2k^2$ となる．右辺は偶数なので，m が偶数となり，m と n がどちらも偶数となり，既約分数でないので矛盾する．

(3)　もし，n が偶数ならば $n = 2k$ となる自然数 k があるので，$n^2 = 4k^2$ となり，偶数になるので矛盾する．

問 1.18

(1)　$n = 1$ の時は，明らか．$\sum_{k=1}^{n} = \frac{n(n+1)}{2}$ を仮定する．

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

より，$n+1$ で成立するので，すべての n に対して成立する．

(2)　$n = 1$ は明らか．n で成り立つとして，

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

(3)　$n = 1$ は明らか．

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

問 1.19

(1)　$n = 0, 1$ では明らか．$a_0 + a_2 + \cdots + a_{2n} = a_{2n+1}$ を仮定すると，

$$a_0 + a_2 + \cdots + a_{2n} + a_{2(n+1)} = a_{2n+1} + a_{2n+2} = a_{2n+3}$$

となるので，$n+1$ の時が示せたのですべての自然数に対し示せた．

(2)　$n = 1$ の時は明らか．$a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2 = a_n a_{n+1}$ と仮定すると，

$$a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2 = a_{n+1} a_{n+2}$$

となり，すべての自然数に対して示せた．

第 8 章

問 8.1

(1) $6(x^3+2x^2+5)^5(3x^2+4x)$ (2) $10x^4+12x^3+30x^2+40x+20$

問 8.2

(1) $2e^{2x}$ (2) $(3x^2+11x+15)e^{3x}$

問 8.3

(1) $\dfrac{1}{x\ln 10}$ (2) $\ln(x^2+2x+4)+\dfrac{2x(x+1)}{x^2+2x+4}$

(3) $-\dfrac{5x^2+18x+14}{(x^2+3x+4)^4}$

問 8.4

(1) $\cos(x^2+1)-2x^2\sin(x^2+1)$

(2) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ （ヒント: $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ として関数の商の微分の公式を使う）

(3) $\dfrac{2(x^3+4)\cos(2x)-3x^2\sin(2x)}{(x^3+4)^2}$

問 8.5

(1) $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (2) $\dfrac{1}{1+x^2}$

問 8.6

(1) $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}+4x+C$ (2) $-\dfrac{\cos(2x+3)}{2}+C$ (3) $-\dfrac{e^{-3x}}{3}+C$

(4) $\ln\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right|+C$ （ヒント: $\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-1}$ を使う）

問 8.7

(1) $\dfrac{2x-1}{4}e^{2x}+C$ (2) $\dfrac{1}{2}x^2\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+C$ (3) $\sin x-x\cos x+C$

問 8.8

(1) $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$ (2) $\sin^{-1}x+C$ （ヒント：$x=\sin\theta$ と変数変換する）

第 9 章

問 9.1

$C_1 \sin x + C_2 \cos x = 0$ とする．$x = 0, \dfrac{\pi}{2}$ を代入すると，$C_1 = C_2 = 0$ となるので，独立である．

問 9.2

(1)　$y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$　(2)　$y = Ce^{-\frac{1}{x}}$　(3)　$y = \dfrac{C}{C + e^{-\lambda x}}$

問 9.3

(1)　$y = x(C - \ln|x|)$

(2)　$\dfrac{dz}{(z-2)(z+1)} = \dfrac{dx}{x}$ を変形すると，$\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z+1}\right)dz = \dfrac{dx}{x}$ となるので，これを積分して，$y = \dfrac{x(2 + Cx^3)}{1 - Cx^3}$ となる．

問 9.4

(1)　$y = C_1 e^{2x} - \dfrac{1}{2}$　(2)　$y = C_1 e^{-x} + x - 1$

問 9.5

$y = C_1 e^{2x} - \dfrac{1}{4}(2x^2 + 2x + 1)$

問 9.6

まず，ロンスキー行列式 $\mathit{\Delta}(x)$ の表式を求めよう．$y_1(x), y_2(x)$ は，斉次方程式 (9.45) の解であるから，

$$y_1''(x) + 2ay_1'(x) + by_1(x) = 0, \tag{1}$$
$$y_2''(x) + 2ay_2'(x) + by_2(x) = 0 \tag{2}$$

が成り立つ．(2) $\times y_1$ - (1) $\times y_2$ とすると，

$$\mathit{\Delta}'(x) + 2a\mathit{\Delta}(x) = 0 \tag{3}$$

となるから，積分して，

$$\mathit{\Delta}(x) = e^{-2a(x-x_0)}\mathit{\Delta}(x_0) \tag{4}$$

となる．したがって， $\Delta(x)$ は，恒等的に 0 であるか，あるいは決して 0 にならない．さて，$y_1(x), y_2(x)$ が線形独立とは，$C_1y_1 + C_2y_2 = 0$ ならば，$C_1 = C_2 = 0$ となることであった．最初に，ロンスキー行列式 $\Delta(x)$ が 0 でないなら，線形独立であることを示す．背理法を用いる．線形独立でないなら，例えば $C_1 \neq 0$ で，$C_1y_1 + C_2y_2 = 0$ が (a, b) で成り立つ．したがって，$y_1 = -\dfrac{C_2}{C_1}y_2$ となる．これと，微分した式 $y_1' = -\dfrac{C_2}{C_1}y_2'$ を $\Delta(x)$ に代入すると，$\Delta(x) = 0$ となる．したがって，矛盾．逆に，線形独立ならロンスキー行列式が 0 にならないことを示す．このときも背理法を用いる．ある点で $\Delta(x)$ が 0 になるとする．すると，恒等的に $\Delta(x) = 0$ である．したがって，$y_1y_2' = y_1'y_2$ が常に成り立つ．独立性より $y_1y_2 \neq 0$ となる区間がある．したがって，両辺を y_1y_2 で割ることにより，その区間で $\dfrac{y_1'}{y_1} = \dfrac{y_2'}{y_2}$ となる．これを積分すると，$\ln|y_1| = \ln|y_2| + C'$ となり，したがって $y_1 = Cy_2$ となるが，これは，y_1, y_2 が独立でないことを意味する．よって矛盾.

第 10 章

問 10.1

(1)　時刻：$\dfrac{v_0}{g}\sin\theta$　　高さ：$\dfrac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta$

(2)　時刻：$\dfrac{2v_0}{g}\sin\theta$　　飛距離：$\dfrac{v_0^2}{g}\sin(2\theta)$

(3)　$\sin(2\theta) = 1$ より，$2\theta = \dfrac{\pi}{2}$，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$　　飛距離：$\dfrac{v_0^2}{g}$